

陈茂强,刘春,陈泓吾,等. ENSO 准周期运动的初步理论分析[J]. 海洋气象学报, 2025, 45(2): 99-117.
CHEN Maoqiang, LIU Chun, CHEN Hongwu, et al. Preliminary theoretical approach on quasi-periodic motion of ENSO [J].
Journal of Marine Meteorology, 2025, 45(2): 99-117. DOI: 10.19513/j.cnki.hyqxxb.20230105002. (in Chinese)

ENSO 准周期运动的初步理论分析

陈茂强¹, 刘春², 陈泓吾³, 张凤鸣², 赵云龙², 宁子硕²

(1. 内江市气象局, 四川 内江 641000; 2. 辽阳市气象局, 辽宁 辽阳 111010; 3. 雅安市气象局, 四川 雅安 625000)

摘要 以一阶近似地转效应的浅水方程为基础, 通过多尺度和摄动近似的方法, 分析低纬海气耦合系统的非线性开尔文(Kelvin)波和罗斯贝(Rossby)波的相互作用。研究表明: (1) 在没有风应力作用时, 耦合波振幅较小, Kelvin波和Rossby波的振幅呈准周期变化, 这种准周期变化是两种类型波各自的扭结效应和二者的非线性效应共同作用的结果。(2) 在有风应力作用时, Kelvin波呈准周期振荡, Rossby波呈非周期振荡, 这种准周期与非周期振荡的叠加效应体现了厄尔尼诺-南方涛动(El Niño-Southern Oscillation, ENSO)周期性不强的准周期振荡特征。(3) 在 ENSO 运动中, Kelvin波和Rossby波一直存在, 由于相互的非线性作用, 二者在不同阶段体现出不同的状态, 总体为: 蛰伏(酝酿)→增长→衰减→蛰伏(酝酿)。

关键词 Kelvin波; Rossby波; 准周期运动; 物理机制; ENSO

中图分类号: P461 **文献标志码**: A **文章编号**: 2096-3599(2025)02-0099-19

DOI: 10.19513/j.cnki.hyqxxb.20230105002

Preliminary theoretical approach on quasi-periodic motion of ENSO

CHEN Maoqiang¹, LIU Chun², CHEN Hongwu³, ZHANG Fengming²,
ZHAO Yunlong², NING Zishuo

(1. Neijiang Meteorological Service, Neijiang 641000, China; 2. Liaoyang Meteorological Service, Liaoyang 111010, China; 3. Ya'an Meteorological Service, Ya'an 625000, China)

Abstract Based on the first-order shallow water equation with approximate geostrophic effect, the interaction between nonlinear Kelvin and Rossby waves in the low-latitude air-sea coupling system is analyzed by using multi-scale and perturbation approximation methods. The results are listed below. (1) When there is no wind stress, the amplitude of the coupling wave is small, and the amplitudes of Kelvin and Rossby waves are quasi periodic. This quasi-periodic change is the result of the kink effect and the nonlinear effect of the two types of waves. (2) When there is wind stress, Kelvin wave oscillates quasi periodically, Rossby wave oscillates aperiodically, and this superposition effect of quasi-periodic and aperiodic oscillations reflects the quasi-periodic oscillation characteristics of ENSO (El Niño-Southern Oscillation) with weak periodicity. (3) In the ENSO movement, Kelvin and Rossby waves always exist. Due to the nonlinear interaction, they show different states at different stages, namely dormancy (brewing)–growth–attenuation–dormancy (brewing) as a whole.

Keywords Kelvin wave; Rossby wave; quasi-periodic motion; physical mechanism; ENSO (El Niño-Southern Oscillation)

收稿日期: 2023-01-05; 修回日期: 2023-03-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(41675095, 41730959)

第一作者: 陈茂强, chengmq@163.com。

通信作者: 刘春, liuchunfh@126.com。

0 引言

厄尔尼诺-南方涛动(El Niño-Southern Oscillation, ENSO)事件是指发生在热带东太平洋海面温度(sea surface temperature, SST)持续异常升高或降低的现象,是影响全球连续但不规则的大气和海洋循环变化的一种现象。虽然 ENSO 发生在热带,但其对全球天气的深远影响是不争的事实。热带海洋和全球大气(Tropical Ocean-Global Atmosphere, TOGA)研究计划的十年间,ENSO 研究取得了长足的进展,关于 ENSO 的机制和不规则性有了丰富的理论解释,更有意义的是在此期间发展了各种复杂程度不一的数值模式来模拟并预测 ENSO。然而,20 世纪 90 年代以来,厄尔尼诺事件异常发生、发展导致对 ENSO 预报技巧的降低,引起学术界对已有的 ENSO 理论及其预测可信度的争议。这说明加深对海气相互作用物理机制的认识,寻找 ENSO 的不规则性原因仍是具有重要意义的课题。

20 世纪 60 年代, Bjerknes^[1]指出,海洋中的厄尔尼诺和南方涛动现象,是热带大尺度海气相互作用的一种表现,并通过沃克(Walker)环流和哈得来(Hadley)环流的调整来阐述 ENSO 循环的物理机制,开启了将热带海洋和全球大气作为一个耦合系统来研究的先河。McCreary 等^[2]在 Walker 环流和 Hadley 环流调整的基础上,结合暖性(冷性)开尔文(Kelvin)波的东传和暖性(冷性)罗斯贝(Rossby)波的西传提出了 ENSO 循环的物理机制。Schopf 等^[3]则利用热带海气耦合模式的计算结果,该模式通过赤道中太平洋的不稳定海气相互作用调整 Kelvin 波和 Rossby 波的冷暖特征来影响 SST 的变化,给出了一种令人信服的 ENSO 循环的物理机制。上述研究主要集中在热带海气相互作用的不稳定理论上,其主要途径包括对热带海气耦合赤道波的稳定性(线性稳定性和弱非线性)分析和非线性简化模式的模拟,这些结果通过热带海洋-大气间反馈机制可以产生不稳定的模态,并且输出类似 ENSO 的不规则时间序列。除了不稳定理论外,值得指出的是, Suarez 等^[4]使用一种比较另类的模式即时滞振子方程也可以较好地再现 ENSO 循环的基本过程。但其赖以建立的物理基础远不如直接由两种地球流体的运动及相互作用出发的经典方法坚实、明确。总体而言,上述的研究深化了对

ENSO 现象的认识,包括 ENSO 产生的物理机制及不规则性。但这些研究更多的是采用数值计算,对于热带海气耦合系统如何作用、不规则性是怎样产生的,缺乏详细的动力分析。

除了 ENSO 自身循环的自激振荡外,外场环境对其发展也具有影响。李崇银^[5]指出大气季节内振荡对厄尔尼诺的激发作用。黄荣辉等^[6]提出 ENSO 循环可能是亚洲季风区与 Hadley 环流区之间存在的低频振荡的产物,并进一步指出了赤道附近西风异常是 ENSO 发生的必要条件。李崇银等^[7]分析东亚大气环流与 ENSO 相互影响时指出,在厄尔尼诺年夏季,由于遥相关机制,东亚及西太平洋中纬度地区出现地面气压及高度场负距平,西太平洋副热带高压位置持续偏南,而拉尼娜(La Niña)年副热带高压则偏北。张人禾等^[8]概述了副热带太平洋海气异常影响 ENSO 研究方面的科学背景及研究进展,综述了前人提出的副热带太平洋大气海洋异常通过经向风应力以及北太平洋和南太平洋经向模态,影响 ENSO 发展演变的途径及相关物理机制。李晓惠等^[9]用经验正交函数分析法以及小波分析方法研究西太平洋暖池与 ENSO 循环过程之间的作用机制。张萍等^[10]从南海降水异常的角度探讨了在 ENSO 期间, Walker 环流异常对南海海面温度异常(SST anomaly, SSTA)的影响过程。林婷婷等^[11]研究了 ENSO 与南海 SST 关系的年代际变化。薛德强等^[12]分析了两类厄尔尼诺事件期间的 SST 异常,发现东部型和中部型厄尔尼诺期间海洋和大气加热场不是赤道对称,赤道以南热源强度大于赤道以北。

观测事实^[13-14]表明, ENSO 现象的基本特征之一是其准周期性,因此,不应将 ENSO 看作是孤立的、偶尔发生的事件,而应该看作是连续的准周期循环。文中将研究这种准周期循环现象的物理机制,从而说明 ENSO 现象是热带海气耦合系统中的一种固有振荡现象。关于线性的自由 Kelvin 波和自由 Rossby 波的存在性, Matsuno^[15]已经做了深入的研究。对于海气耦合系统而言,还需要解决海气的耦合可行性、耦合波的相互作用和非线性效应以及海气的相互作用(热力和风应力)对耦合波的影响等问题。Domaracki 等^[16]从能量的角度分析 Kelvin 波和自由 Rossby 波的非线性特征,但要深入地认识 ENSO 的振荡特征,还需要从海气流场结构的演变

来进一步分析。

为此,通过海气耦合系统的 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用来研究 ENSO 循环的物理机制。首先,从尺度分析的角度研究海气耦合的可行性,并得到无量纲的海气耦合方程;其次,结合多尺度分析和摄动近似,对无量纲的海气耦合模式进行简化,得到大气和海洋 Kelvin 波和 Rossby 波波幅的准周期变化特征;最后,结合两者的经向结构,分析 ENSO 循环的物理机制。

1 赤道海气耦合方程

Chao 等^[17]对热带海洋和大气的尺度分析认为,虽然大气运动的变化比海洋的运动快得多,大气的经圈尺度比海洋的经圈尺度大得多,但是海洋以其时间尺度加热于大气经圈尺度上的大气运动,而大气以其时间尺度作用于海洋经圈尺度上的海洋运动,这样的加热和风应力作用是一致的,因此热带海洋和大气的耦合是协调的。

下面,通过近似地转效应的浅水方程来分析热带海气耦合系统的非线性 Kelvin 波和 Rossby 波的运动情况。

海洋浅水波模式如下。

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) u_s - \beta y v_s = - \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \tau_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) v_s + \beta y u_s = - \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_s + C_s^2 \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: t 为时间; u_s 为海洋纬向速度; v_s 为海洋经向速度; x 为纬向距离; y 为经向距离; $\theta_s = \frac{p_s}{\rho_s} = gh_s$, p_s 为相对于海洋的压力偏差, ρ_s 为海洋密度, h_s 为海洋斜温层深度; τ_x 为洋面风应力; $C_s = \sqrt{gH_s}$,为海洋重力内波波

速,约为 $10^0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; β 为 Rossby 参数,约为 $10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

房佳蓓等^[18]的研究结果表明,纬向风应力在海气耦合中起绝对主导作用,所以在研究热带太平洋海气耦合动力学对 ENSO 不稳定发展的贡献时,采用忽略经向风应力作用的近似是合理可行的。为此,在海洋浅水波模式中,仅考虑纬向风应力,而忽略经向风应力。

大气线性模式如下。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial t} - \beta y v_a = - \frac{\partial \theta_a}{\partial x} \\ \beta y u_a = - \frac{\partial \theta_a}{\partial y} \\ C_a^2 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = Q \end{cases} \quad (2)$$

其中: u_a 为大气纬向速度; v_a 为大气经向速度; $\theta_a = \frac{p_a}{\rho_a}$, p_a 为相对于大气的气压偏差, ρ_a 为大气密度; $C_a = \sqrt{gH_a}$,为大气重力内波波速,约为 $10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; Q 为海洋对大气的热源强迫。

根据 Bjerknes^[1]关于 Walker 环流调整阐述 ENSO 循环的物理机制的假设,这里的海洋浅水模式主要考虑了纬向风应力,而略去经向风应力。由于 Philander 等^[13]考虑海洋斜温层深度的变化影响 SST,后者再加热给大气,因此,可设大气热源和海洋斜温层深度成正比,即

$$Q = \lambda \theta_s \quad (3)$$

再设洋面的风应力与大气风速成正比,即

$$\tau_x = r u_a \quad (4)$$

其中: $\lambda = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$,为热源加热系数; $r = 5 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$,为风应力系数。假定风应力为定常,则根据大气线性模式,可知 $C_a^2 \frac{\partial u_a}{\partial x} = 2\lambda \theta_s + \lambda y \frac{\partial \theta_s}{\partial y}$ 。由此,可得简化的耦合模式如下。

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) u_s - \beta y v_s = - \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \frac{r\lambda}{C_a^2} \int_0^{L_s} \left(2\theta_s + y \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \right) dx \\ \beta y u_s = - \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_s + C_s^2 \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

对上述方程进行无量纲分析,令

$$\begin{aligned}(u_a, v_a) &\sim O(U_a)(u'_a, v'_a), (t) \sim O(1/\beta L_a)t', (x, y) \sim O(L_a)(x', y'), (\theta_a) \sim O(\beta L_a^2 U_a)\theta'_a \\ (u_s, v_s) &\sim O(U_s)(u'_s, v'_s), (t) \sim O(1/\beta L_s)t', (x, y) \sim O(L_s)(x', y'), (\theta_s) \sim O(\beta L_s^2 U_s)\theta'_s\end{aligned}\quad (6)$$

其中: O 表示函数阶数; $L_a = (\sqrt{gH_a}/\beta)^{\frac{1}{2}}, L_a \approx 10^7 \text{ m}$; 量纲量。将公式(6)带入到公式(5),并略去“'”,
 $L_s = (\sqrt{gH_s}/\beta)^{\frac{1}{2}}, L_s \approx 10^6 \text{ m}$; 系数 r', λ', C'_a, C'_s 为无 得到耦合模式的无量纲方程。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \varepsilon \left(u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) u_s - y v_s = -\frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \varepsilon \kappa \int_0^{L_s} \left(2\theta_s + y \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \right) dx \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \varepsilon \left(u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) v_s + y u_s = -\frac{\partial \theta_s}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \varepsilon \left(u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_s + \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\varepsilon = \bar{U}_s/\beta L_s^2$; $\kappa = 10^{12} \times \frac{r\lambda\beta L_s^2}{2\bar{U}C_a^2}$; 如果 $\bar{U}_a = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \bar{U}_s = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \bar{H}_a = 10^4 \text{ m}, \bar{H}_s = 10^{-1} \text{ m}$, 则 $\varepsilon \sim O(10^{-2})$ 。

假设赤道太平洋范围为 $-R \leq y \leq R, 0 \leq x \leq D$, 其中 $R = 4\,500 \text{ km}, D = 10\,000 \text{ km}$, 又设耦合模式运动在该范围关于赤道是对称的。由于太平洋西海岸为非刚性边界, 在此研究中, 考虑通道流, 对应的耦合模式非刚性边界条件如下。

$$\frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{\partial \theta_s}{\partial y} = v_s = 0, y = \pm R \quad (8)$$

下面, 根据公式(7)和边界条件(8), 分析耦合模式的 Kelvin 波和 Rossby 波的运动, 在此基础上, 讨论 ENSO 准周期运动的物理机制。

2 非线性赤道海气耦合 Kelvin 波与 Rossby 波

将赤道海气耦合运动做如此分解: 海洋运动为具有水平切变的基本流和扰动流(大气运动不分解, 直接通过线性模式求解)。

$$u_s = \bar{U}_s(y) + u'_s, v_s = v'_s, \theta_s = \bar{\Phi}_s(y) + \theta'_s \quad (9)$$

其中: $\bar{U}_s(y), \bar{\Phi}_s(y)$ 为基本流场, u'_s, v'_s, θ'_s 为扰动流场。考虑到经向上的地转平衡近似

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \bar{U}_s \frac{\partial}{\partial x} \right) u_s + \varepsilon \left(u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) u_s - \left(y - \varepsilon \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) v_s = -\frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \varepsilon \kappa \int_0^{L_s} \left(2(\bar{\Phi}_s + \theta_s) + y \frac{\partial(\bar{\Phi}_s + \theta_s)}{\partial y} \right) dx \\ y u_s + \frac{\partial \theta_s}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \bar{U}_s \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta_s + \varepsilon \left(u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_s + \varepsilon \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} v_s + \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

扰动流场的边界条件为

$$u_s = \theta_s = v_s = 0, y = \pm R \quad (11)$$

由于 ENSO 属于年际变化, 其过程既包含了快运动, 又包含了慢运动。因此, 对公式(10)中的小参数 $\varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$, 采用多重尺度分析法, 引入缓变的时间与空间变量:

$$\begin{cases} \tau = \varepsilon t \\ \xi = \varepsilon x \end{cases} \quad \begin{cases} T = \varepsilon^2 t \\ X = \varepsilon^2 x \end{cases} \quad (12)$$

且在 y 方向上仍为快变的, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \quad (13)$$

将扰动函数展开为

$$\begin{cases} u_s = u_{s0} + \varepsilon u_{s1} + \varepsilon^2 u_{s2} + \dots \\ v_s = v_{s0} + \varepsilon v_{s1} + \varepsilon^2 v_{s2} + \dots \\ \theta_s = \theta_{s0} + \varepsilon \theta_{s1} + \varepsilon^2 \theta_{s2} + \dots \end{cases} \quad (14)$$

将公式(12)、(13)和(14)带入到公式(10)中,得到关于 θ_s 的 ε -各阶问题。

$O(\varepsilon^0)$ 阶问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{s0}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial x} - y v_{s0} = 0 \\ y u_{s0} + \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_{s0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{s0}}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

可以看出, $O(\varepsilon^0)$ 阶问题即为线性模式。根据 Matsuno^[15] 的研究, 线性低纬大气方程可以激发出东行的 Kelvin 波和西行的 Rossby 波。因此可以设

$$\theta_{s0} = \theta_{s01} + \theta_{s02} \quad (16)$$

其中: $\theta_{s01} = A_1(\tau, T, \xi, X) \theta_1^{(0)}(y) e^{ik(x-c_1 t)} + C.C$, $\theta_{s02} = A_2(\tau, T, \xi, X) \theta_2^{(0)}(y) e^{ik(x-c_2 t)} + C.C$; c_1 和 c_2 分别代表 Kelvin 波和 Rossby 波的波速 ($c_g = \sqrt{gH_s}$), $c_1 = \frac{1}{2(k^2+2n+1)} - \frac{3}{8(k^2+2n+1)^{1/2}}$, $c_2 = -\frac{1}{k^2+2n+1}$, k 为 Rossby 波和 Kelvin 波的波数, n 为简谐振子的特征值; $A_j(j=1,2)$ 分别代表 Kelvin 波和 Rossby 波的扰动流场振幅, 为缓变量函数, 由高阶问题决定; $\theta_j^{(0)}(y) (j=1,2)$ 则决定了波的经向结构; $C.C$ 为前项的共轭。

简化方程(15), 得到关于 θ_{s0} 的方程。

$$\mathcal{L}(\theta_{s0}) = 0 \quad (17)$$

其中: $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \left(I + \frac{2}{y^3} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x}$ 。将解形式(16)带入到方程(17)中, 得到经向结构满足条件:

$$\frac{d^2 \varphi_j^{(0)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_j} + y^2 \right) \varphi_j^{(0)} = 0 \quad (18)$$

根据扰动流场的边界条件(11), 可以认为

$$\varphi_j^{(0)}(y) \big|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0 \quad (19)$$

此时, 方程(18)在边界条件(19)下的解为

$$\varphi_j^{(0)} = \frac{1}{2} (\omega_j - k) \psi_{n+1} - n (\omega_j + k) \psi_{n-1}, \quad j=1,2 \quad (20)$$

其中: $\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$, 为薛定谔 (Schrödinger) 简谐运动方程的解形式, $H_n(y)$ 为埃尔米特 (Hermite) 多项式; $\omega_j = kc_j (j=1,2)$ 。

$O(\varepsilon^1)$ 阶问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{s1}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{s1}}{\partial x} - y v_{s1} = F_1 \\ y u_{s1} + \frac{\partial \theta_{s1}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \theta_{s1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{s1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_{s1}}{\partial y} \right) = F_2 \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= - \left(\frac{\partial u_{s0}}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \xi} + u_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial x} + \bar{U}_s \frac{\partial u_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial y} + \frac{d\bar{U}_s}{dy} v_{s0} + \right. \\ &\quad \left. \kappa \int_0^x \left(2(\bar{\Phi}_s + \theta_s) + y \frac{\partial(\bar{\Phi}_s + \theta_s)}{\partial y} \right) dx \right) \\ F_2 &= - \left(\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \tau} + \frac{\partial u_{s0}}{\partial \xi} - y \bar{U}_s v_{s0} + u_{s0} \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial x} + \bar{U}_s \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

通过公式(15), 将 $O(\varepsilon^1)$ 阶问题化为关于海洋偏差的一阶近似 θ_1 的方程

$$\mathcal{L}(\theta_1) = F = F_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} F_1 \right) \quad (22)$$

将公式(16)带入到公式(22), 并考虑到公式(20), 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_1) &= - \sum_{j=1}^2 e^{ik(x-c_j t)} f_{1j} - \sum_{j=1}^2 ik A_j^2 e^{2ik(x-c_j t)} f_{2j} - \\ &\quad ik A_1 A_2 e^{ik[2x-(c_1+c_2)t]} f_3 - ik A_1 \bar{A}_2 e^{-(c_1-c_2)t} f_4 - \\ &\quad ik \bar{A}_1 A_2 e^{(c_1-c_2)t} f_5 - \frac{\kappa}{ik} A_1 e^{ik(-c_1)t} f_6 - \frac{\kappa}{ik} A_2 e^{ik(-c_2)t} f_7 - \end{aligned} \quad (23)$$

$\kappa \frac{2x}{y^2} \bar{\Phi}_s + \kappa \frac{2x}{y} \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} - \kappa x \frac{d^2 \bar{\Phi}_s}{dy^2} + C.C$
 $f_{1j} f_{2j} f_3 f_4 f_5 f_6 f_7$ 的表达式见附录 A。由于 $\mathcal{L}$ 是线性算子, 且具有形如行波解形式 $\sum_{j=1}^2 B_j e^{ik(x-c_j t)}$, 对于其非齐次方程(23)的右边, 不能存在含有 $e^{ik(x-c_j t)}$ ($j=1,2$) 的项[如果有, 方程(23)特解中将会存在含有形如 $te^{ik(x-c_j t)}$ ($j=1,2$) 的项]。因此, 为了消除久期项, 则必须满足条件 $f_{1j} = 0$, 即

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{y^2} \varphi_j^{(0)} + \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \xi} - \left(\varphi_j^{(0)} + \frac{2}{y^3} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y^2} \frac{d^2 \varphi_j^{(0)}}{dy^2} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \tau} = \frac{1}{y} \left[\frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} \left(\varphi_j^{(0)} + c_j \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) + \right. \\ & \left. \frac{c_j}{y^2} \frac{d\bar{U}_s}{dy} \left(\frac{d^2 \varphi_j^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) - \bar{U}_s \left(c_j \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_j^{(0)}}{dy^2} \right) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{y} \varphi_j^{(0)} - \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \right] ikA_j \end{aligned} \quad (24)$$

不妨设

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \sum_{j=1}^2 A_j^2 \varphi_j^{(1)}(y) e^{2ik(x-c_1 t)} + A_1 A_2 \varphi_3^{(1)}(y) e^{ik[2x-(c_1+c_2)t]} + A_1 \bar{A}_2 \varphi_4^{(1)}(y) e^{-ik(c_1-c_2)t} + \bar{A}_1 A_2 \varphi_5^{(1)}(y) e^{ik(c_1-c_2)t} + \\ & \frac{\kappa}{ik} A_1 \varphi_6^{(1)}(y) e^{ik(-c_1)t} + \frac{\kappa}{ik} A_2 \varphi_7^{(1)}(y) e^{ik(-c_2)t} + \kappa x^2 \bar{\Phi}_s - \kappa x^2 y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \kappa x y^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_s}{dy^2} + C.C \end{aligned} \quad (25)$$

为进一步得到关于振幅 A_j 的条件,需进一步考虑 $O(\varepsilon^2)$ 阶问题。

$O(\varepsilon^2)$ 阶问题(由于扰动 ϑ_s 也是按 ε 展开的,因此强迫项将从两个方面影响 $O(\varepsilon^2)$ 阶问题):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{s2}}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta_{s2}}{\partial x} - y v_{s2} = G_1 \\ y u_{s2} + \frac{\partial \vartheta_{s2}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \vartheta_{s2}}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_{s2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{s2}}{\partial y} \right) = G_2 \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1 = & -\frac{\partial u_{s1}}{\partial \tau} - u_{s0} \frac{\partial u_{s1}}{\partial x} - u_{s1} \frac{\partial u_{s0}}{\partial x} - v_{s0} \frac{\partial u_{s1}}{\partial y} - v_{s1} \frac{\partial u_{s0}}{\partial y} - \bar{U}_s \frac{\partial u_{s1}}{\partial x} - \\ & \frac{\partial \vartheta_{s1}}{\partial \xi} - \frac{d\bar{U}_s}{dy} v_{s1} - u_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{s0}}{\partial T} - \frac{\partial \vartheta_{s0}}{\partial X} - \kappa \int_0^x \vartheta_{s1} dx, \\ G_2 = & -\frac{\partial u_{s1}}{\partial \xi} - u_{s0} \frac{\partial \vartheta_{s1}}{\partial x} - u_{s1} \frac{\partial \vartheta_{s0}}{\partial x} - v_{s0} \frac{\partial \vartheta_{s1}}{\partial y} - v_{s1} \frac{\partial \vartheta_{s0}}{\partial y} - \\ & \frac{\partial \vartheta_{s1}}{\partial \tau} + y \bar{U}_s v_{s1} - \bar{U}_s \frac{\partial \vartheta_{s1}}{\partial x} - u_{s0} \frac{\partial \vartheta_{s0}}{\partial \xi} - \frac{\partial \vartheta_{s0}}{\partial T} - \frac{\partial u_{s0}}{\partial X} \circ \end{aligned}$$

通过公式(15)、(21),将 $O(\varepsilon^2)$ 阶问题化为关于海洋偏差的二阶近似 ϑ_2 的方程

$$\mathcal{L}(\vartheta_2) = G = G_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} G_1 \right) \quad (27)$$

将公式(16)、(25)代入公式(27),得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vartheta_2) = & \left\{ \frac{y^4}{4} \varphi_1^{(1)} \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{y^2}{4} \left(-y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \left(y^3 \bar{U}_s - y \frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \right. \\ & \frac{y^3}{4} \left(y^3 \varphi_1^{(1)} - y \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + 2 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \frac{\partial A_1}{\partial T} + \frac{y^3}{4} \left(-y \frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} \varphi_1^{(1)} - y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + \left(y^3 \bar{U}_s + 2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \varphi_1^{(1)} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi} + \\ & \kappa \left[\frac{xy^3}{4} \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^3 \varphi_1^{(1)}}{dy^3} + \frac{xy^4}{4} \frac{d^3 \bar{\Phi}_s}{dy^3} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - xy^2 \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} - \frac{xy^3}{4} \frac{d^2 \bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + \right. \\ & \left. xy \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] A_1 + \left[\frac{ky}{4} \frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} \left(\left(y \bar{U}_s - 2c_1 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - 2y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_1^{(1)} \right) - \right. \\ & \frac{\kappa k x^2 y^3}{8} \frac{d^4 \bar{\Phi}_s}{dy^4} \left(y \varphi_1^{(1)} + c_1 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) + \frac{\kappa x y^2}{4} \frac{d^3 \bar{\Phi}_s}{dy^3} \left(-\frac{kc_1 xy}{2} \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \left(-\frac{kxy^2}{2} + \frac{3kc_1 x}{2} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + kxy \varphi_1^{(1)} \right) + \\ & y \left(-y \left(\frac{kc_1}{4} \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 - \frac{ky}{4} \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \frac{\kappa kc_1 x^2 y^4}{8} \frac{d^2 \bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + \frac{ky}{4} \left(y^3 \bar{U}_s + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_1^{(1)} + \right. \\ & \left. \left(kc_1 \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 + \frac{ky}{4} (c_1 y^2 - 3) \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} - \frac{ky^4}{4} \bar{U}_s^2 \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] iA_1 + \left[\frac{k(c_1 - c_2) y^2}{4} \frac{d^3 \varphi_2^{(1)}}{dy^3} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + y \varphi_2^{(1)} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{ky^2}{4} \left(y\varphi_2^{(1)} + c_2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^3\varphi_5^{(1)}}{dy^3} - \frac{5ky}{4} \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} \left(-\frac{c_1y}{5} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(c_1 - \frac{4c_2}{5} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \right) - ky^2\varphi_2^{(1)} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} - \\
& ky \left(\left(-\frac{y^2}{4} + \frac{c_1}{4} + c_2 \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(\left(\frac{5c_1}{4} - \frac{c_1y^4}{4} - \frac{y^2}{4} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \left[iA_1 |A_2|^2 \right] e^{ik(x-c_1t)} + \\
& \left\{ \frac{y^4}{4} \varphi_2^{(1)} \frac{\partial A_2}{\partial X} - \frac{y^2}{4} \left(-y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \left(y^3 \bar{U}_s - y \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \tau} - \right. \\
& \frac{y^3}{4} \left(y^3 \varphi_2^{(1)} - y \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + 2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{\partial A_2}{\partial T} + \frac{y^3}{4} \left(-y \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} \varphi_2^{(1)} - y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + \left(y^3 \bar{U}_s + 2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \varphi_2^{(1)} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \\
& \kappa \left[\frac{xy^3}{4} \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^3\varphi_2^{(1)}}{dy^3} + \frac{xy^4}{4} \frac{d^3\bar{\Phi}_s}{dy^3} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - xy^2 \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} - \frac{xy^3}{4} \frac{d^2\bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + \right. \\
& xy \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \left. \right] A_2 + \left[\frac{ky}{4} \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} \left(\left(y\bar{U}_s - 2c_2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - 2y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_2^{(1)} \right) - \right. \\
& \frac{\kappa kx^2y^3}{8} \frac{d^4\bar{\Phi}_s}{dy^4} \left(y\varphi_2^{(1)} + c_2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) + \frac{\kappa xy^2}{4} \frac{d^3\bar{\Phi}_s}{dy^3} \left(-\frac{kc_2xy}{2} \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \left(-\frac{kxy^2}{2} + \frac{3kc_2x}{2} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + kxy\varphi_2^{(1)} \right) + \\
& y \left(-y \left(\frac{kc_2}{4} \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 - \frac{ky}{4} \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \frac{\kappa kc_2x^2y^4}{8} \frac{d^2\bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + \frac{ky}{4} \left(y^3 \bar{U}_s + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_2^{(1)} + \right. \\
& \left. \left(kc_2 \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 + \frac{ky}{4} (c_2y^2 - 3) \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} - \frac{ky^4}{4} \bar{U}_s^2 \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \left. \right] iA_2 + \left[\frac{k(c_2 - c_1)y^2}{4} \frac{d^3\varphi_1^{(1)}}{dy^3} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + y\varphi_1^{(1)} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + \right. \\
& \frac{ky^2}{4} \left(y\varphi_1^{(1)} + c_1 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^3\varphi_5^{(1)}}{dy^3} - \frac{5ky}{4} \frac{d^2\varphi_1^{(1)}}{dy^2} \left(-\frac{c_2y}{5} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(c_2 - \frac{4c_1}{5} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \right) - ky^2\varphi_1^{(1)} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} - \\
& ky \left(\left(-\frac{y^2}{4} + \frac{c_2}{4} + c_1 \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(\left(\frac{5c_2}{4} - \frac{c_2y^4}{4} - \frac{y^2}{4} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \left. \right] iA_2 |A_1|^2 \left. \right\} e^{ik(x-c_2t)} + \text{其他项}
\end{aligned} \tag{28}$$

消除久期项,并在经向方向积分,得到赤道海洋和大气的耦合 Kelvin 波和 Rossby 波的振幅方程

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial T} + \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \xi} + \gamma_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \kappa \delta_1 A_1 + i\eta_1 A_1 + i\sigma_{12} A_1 |A_2|^2 = 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + \alpha_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} + \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + \kappa \delta_2 A_2 + i\eta_2 A_2 + i\sigma_{21} A_2 |A_1|^2 = 0 \end{cases} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{I_{11}}{I_1}, \beta_1 = \frac{I_{12}}{I_1}, \gamma_1 = \frac{I_{13}}{I_1}, \delta_1 = \frac{I_{14}}{I_1}, \eta_1 = \frac{I_{15}}{I_1}, \sigma_1 = \frac{I_{16}}{I_1} \\
\alpha_2 &= \frac{I_{21}}{I_2}, \beta_2 = \frac{I_{22}}{I_2}, \gamma_2 = \frac{I_{23}}{I_2}, \delta_2 = \frac{I_{24}}{I_2}, \eta_2 = \frac{I_{25}}{I_2}, \sigma_2 = \frac{I_{26}}{I_2}
\end{aligned}$$

方程中的各参数表达式见附录 B。

3 耦合模式中的风应力强迫作用

通过 WKB 方法,已得到赤道海洋和大气的耦合 Kelvin 波和 Rossby 波的振幅方程。根据海洋和大气波动理论,其耦合波运动主要依赖于振幅的

调制。然而,振幅方程(29)是非线性的复偏微分方程,无法对其求解析解,为了更清楚地了解耦合波运动的物理机制,需要对方程(29)进行进一步分析。为此,对振幅方程(29)的时间和空间做如下变换:

$$\zeta = \left(\xi - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \tau \right) - \gamma_1 (X - \alpha_1 T) =$$

$$K \left[\left(\xi - \frac{\beta_2}{\gamma_2} \tau \right) - \gamma_2 (X - \alpha_2 T) \right] \quad (30)$$

得到如下复方程形式:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{d\zeta} = \kappa \delta'_1 A_1 + i \eta'_1 A_1 + i \sigma'_{12} A_1 |A_2|^2 \\ \frac{dA_2}{d\zeta} = \kappa \delta'_2 A_2 + i \eta'_2 A_2 + i \sigma'_{21} A_2 |A_1|^2 \end{cases} \quad (31)$$

由于 $A_j (j=1, 2)$ 为复数, 则设

$$A_1 = A_{1R} + i A_{1I}, \quad A_2 = A_{2R} + i A_{2I} \quad (32)$$

则方程可以化为如下实方程:

$$\begin{cases} \frac{dA_{1R}}{d\zeta} = \kappa \delta'_1 A_{1R} - \eta'_1 A_{1I} - \sigma'_{12} A_{1I} (A_{2R}^2 - A_{2I}^2) \\ \frac{dA_{1I}}{d\zeta} = \kappa \delta'_1 A_{1I} + \eta'_1 A_{1R} + \sigma'_{12} A_{1R} (A_{2R}^2 - A_{2I}^2) \\ \frac{dA_{2R}}{d\zeta} = \kappa \delta'_2 A_{2R} - \eta'_2 A_{2I} - \sigma'_{21} A_{2I} (A_{1R}^2 - A_{1I}^2) \\ \frac{dA_{2I}}{d\zeta} = \kappa \delta'_2 A_{2I} + \eta'_2 A_{2R} + \sigma'_{21} A_{2R} (A_{1R}^2 - A_{1I}^2) \end{cases} \quad (33)$$

变换后的振幅方程(33)是四维的非线性常微分方程组, 无法直接求出解析解, 但可采用定性理论对其进行分析。根据复方程形式(31)可知, 方程右边各项系数为实数, 或者为纯虚数, 而实系数主要

由外源强迫引起, 即大气风应力和海洋热力强迫。

下面的分析将会表明, 纯虚系数项在系统(31)中起着重要作用, 将单独考虑。为此, 假设耦合运动无外源强迫, 即没有风应力和热力强迫作用。令 $\kappa=0$, 此时方程(33)线性部分的拓扑结构为环, 其对应的时序解为周期解, 在非线性作用下, Kelvin 波和 Rossby 波的振幅呈准周期变化。由方程(33)可以看出, 出现这种准周期变化的原因主要在于两点: 一是线性扭结作用, 即复方程(31)中的纯虚数项经过复数分解(32), 构成了方程(33)的线性系统的双环结构, 这种双环结构将造成 Kelvin 波和 Rossby 波各自独立地做周期运动, 是耦合波做准周期运动的基础; 二是非线性作用, 方程(33)的非线性项中含有 $|A_{3-j}|^2$, 该项即为 Kelvin 波与 Rossby 波的相互作用, 通过自身的变化来引起对方的变化, 使得二者的振幅呈准周期振荡, 而不是周期性振荡。

取 $k=2$, $n=1$, $[y_1, y_2] = (-\infty, \infty)$, 初值 $(A_{1R}, A_{1I}, A_{2R}, A_{2I})|_{\zeta=0} = (0.7, 1.0, 1.5, 2.0)$, $\bar{\theta}(\gamma) = 0.5\gamma$, 根据计算, $\alpha_1 = 0.2641$, $\alpha_2 = 0.4210$, $\beta_1 = 0.083$, $\beta_2 = 0.170$, $\gamma_1 = 1.57$, $\gamma_2 = 2.06$, $\eta'_1 = 0.71$, $\eta'_2 = 0.64$, $\sigma'_{12} = 2.61$, $\sigma'_{21} = 3.17$ 。同时, 考虑到无量纲变换公式(2), 得到如下 Kelvin 波和 Rossby 波波幅的相图(图1)和时序图(图2)。

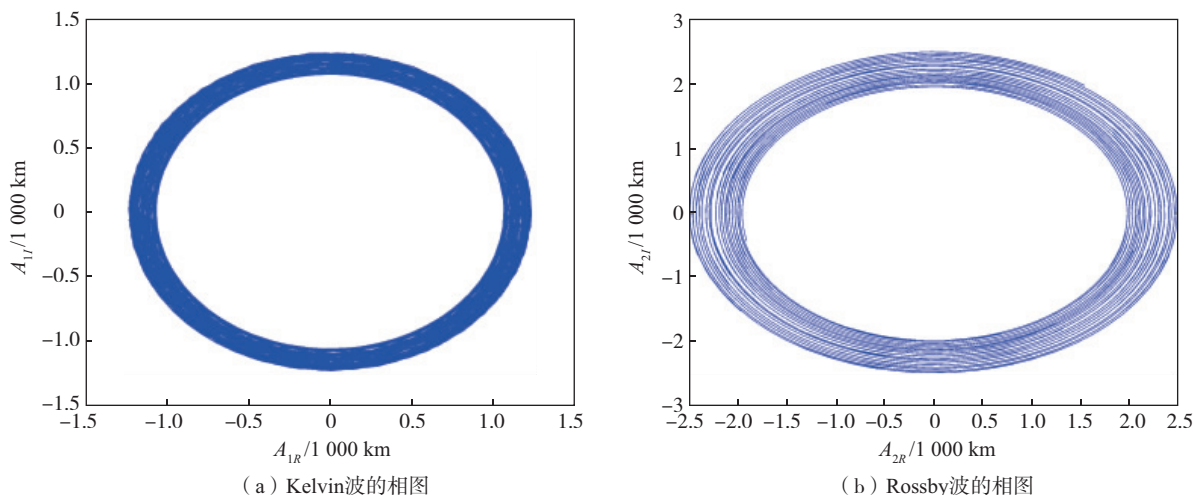


图1 $\kappa=0$ 时 Kelvin 波和 Rossby 波的相图

Fig.1 Phase diagram of Kelvin and Rossby waves in the condition of $\kappa=0$

进一步地, 分析 $\kappa \neq 0$ 的情况。此时, 线性系统不再是环结构, 而是不稳定焦点结构。这意味着系统(33)在初始阶段, 主要由线性项控制, 受

不稳定焦点结构影响, Kelvin 波和 Rossby 波的振幅将呈指数型螺旋振荡增大; 时间达到一定时长后, 主要由非线性项驱动, 而非线性项具有准周

期振荡特征。注意, Rossby 波的波幅出现了混沌现象。

根据上面的取值, 可得 $\kappa = 0.026$, $\eta''_1 = 0.86$,

$\eta''_2 = 0.73$, 其他值不变。同时, 考虑到无量纲变换公式(2), 得到如下 Kelvin 波和 Rossby 波波幅的相图(图3)和时序图(图4)。

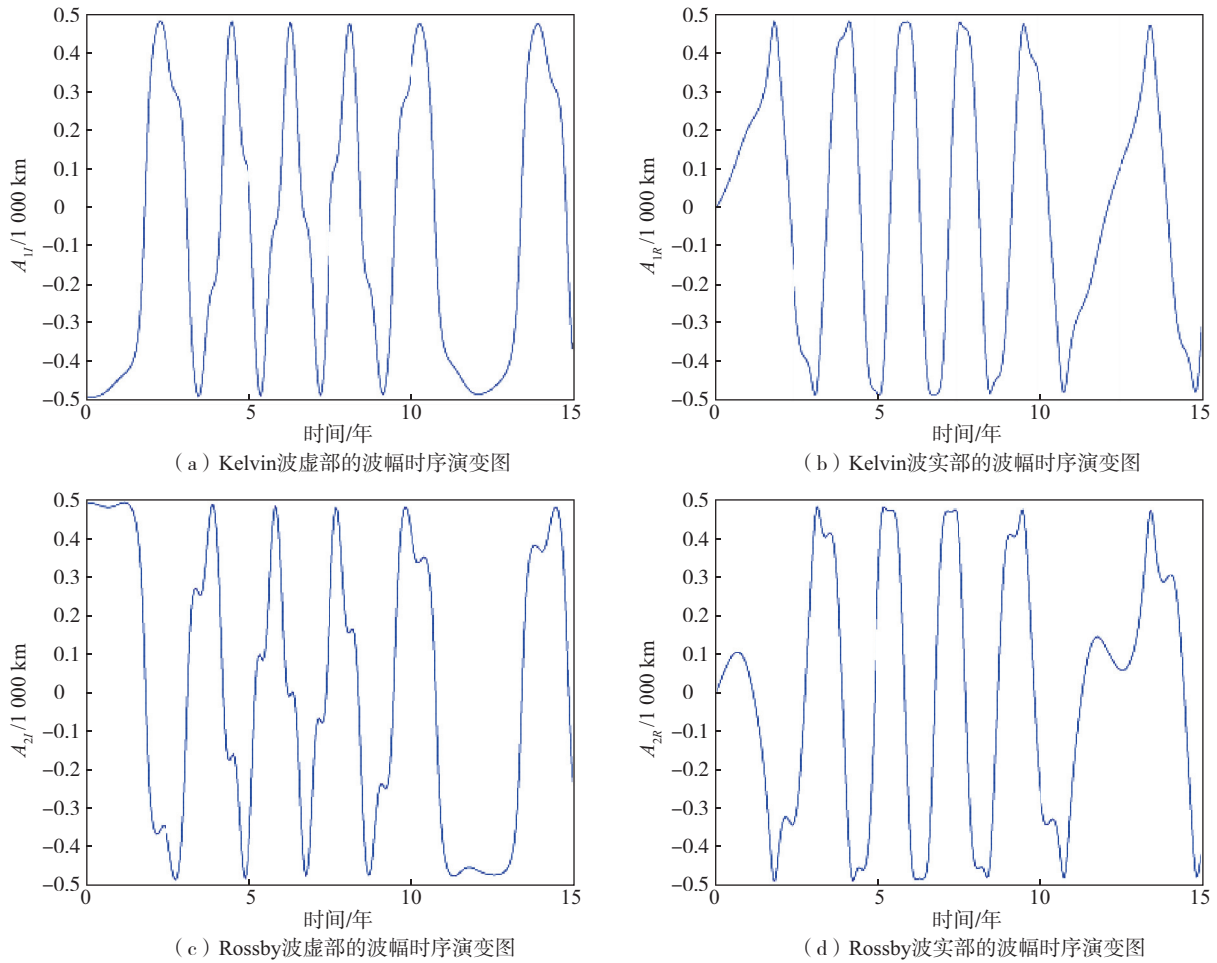


图2 $\kappa=0$ 时 Kelvin 波和 Rossby 波的波幅时序演变图

Fig.2 Time series of amplitude of Kelvin and Rossby waves in the condition of $\kappa=0$

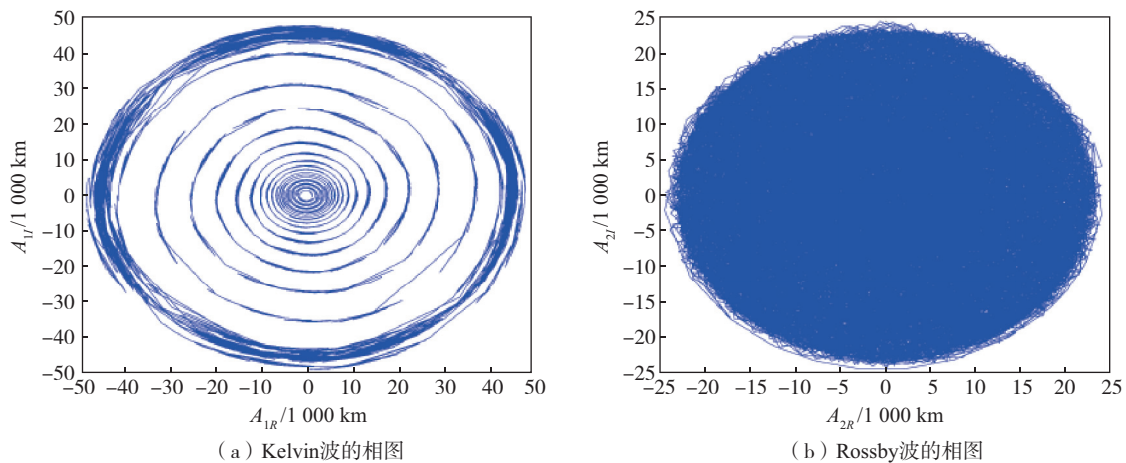
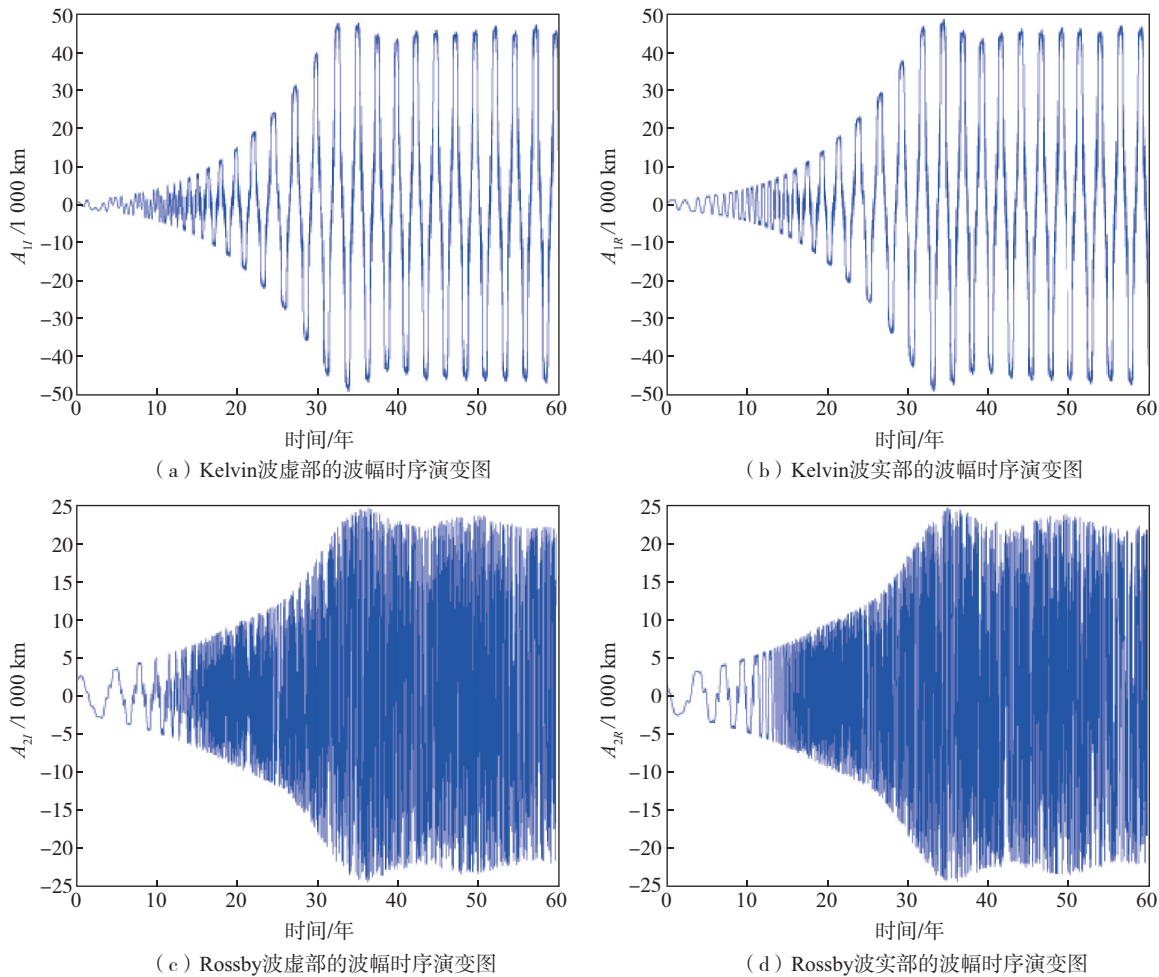


图3 $\kappa \neq 0$ 时 Kelvin 波和 Rossby 波的相图

Fig.3 Phase diagram of Kelvin and Rossby waves in the condition of $\kappa \neq 0$

图 4 $\kappa \neq 0$ 时 Kelvin 波和 Rossby 波的波幅时序演变图Fig.4 Time series of amplitude of Kelvin and Rossby waves in the condition of $\kappa \neq 0$

由上述分析可以看出,海洋自身具有 Kelvin 波和 Rossby 波的非线性准周期振荡的自驱动力,但是这种自驱动力较弱,而风应力以及海洋热源强迫对风应力的反馈作用(下面简称“反馈作用”),促进了海洋 Kelvin 波和 Rossby 波振幅增大;同时,风应力及反馈作用也进一步加强了海洋 Kelvin 波和 Rossby 波的非线性效应,在上述参数下, Rossby 波出现明显的混沌现象。这种准周期与非周期振荡的叠加效应,体现了 ENSO 不规则性的特征。

4 ENSO 准周期振荡模拟

对赤道海洋和大气的耦合 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用进行分析,为了获得赤道太平洋运动的物理机制,根据一阶近似表达式(25),还需求出耦合波的经向结构,因此,需要求出 $\varphi_1^{(1)}$ 、 $\varphi_2^{(1)}$ 、 $\varphi_3^{(1)}$ 、 $\varphi_4^{(1)}$ 、 $\varphi_5^{(1)}$ 、 $\varphi_6^{(1)}$ 、 $\varphi_7^{(1)}$ 的特征值问题。

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_1} + y^2 \right) \varphi_1^{(1)} = -\frac{f_{21} y^2}{2c_1} \\ \frac{d^2 \varphi_2^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_2} + y^2 \right) \varphi_2^{(1)} = -\frac{f_{22} y^2}{2c_2} \\ \frac{d^2 \varphi_3^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_3^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_1 + c_2} + y^2 \right) \varphi_3^{(1)} = -\frac{f_3 y^2}{2(c_1 + c_2)} \\ \frac{d^2 \varphi_4^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_4^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_4^{(1)} = -\frac{f_4 y^2}{(c_1 - c_2)} \\ \frac{d^2 \varphi_5^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_5^{(1)} = -\frac{f_5 y^2}{(c_2 - c_1)} \\ \frac{d^2 \varphi_6^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_6^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_6^{(1)} = \frac{f_6 y^2}{c_1} \\ \frac{d^2 \varphi_7^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_7^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_7^{(1)} = \frac{f_7 y^2}{c_2} \end{cases} \quad (34)$$

根据附录 A,公式(34)的右边为 $\varphi_1^{(0)}$ 、 $\varphi_2^{(0)}$ 的函数。

因此,将解(23)带入到公式(34)中,得到

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi_1^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_1} + y^2\right) \varphi_1^{(1)} = \chi_1(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + \delta_1(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_2} + y^2\right) \varphi_2^{(1)} = \chi_2(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + \delta_2(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_3^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_3^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_1 + c_2} + y^2\right) \varphi_3^{(1)} = \delta_3(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_4^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_4^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_1 - c_2} + y^2\right) \varphi_4^{(1)} = \chi_4(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + \delta_4(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} - \left(\frac{1}{c_2 - c_1} + y^2\right) \varphi_5^{(1)} = \delta_5(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_6^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_6^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_6^{(1)} = \delta_6(y) e^{-y^2} \\ \frac{d^2\varphi_7^{(1)}}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\varphi_7^{(1)}}{dy} - y^2 \varphi_7^{(1)} = \delta_7(y) e^{-y^2} \end{cases} \quad (35)$$

方程(35)为 Sturm-Liouville 方程形式, χ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$), δ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) 为多项式函数,

其表达式见附录 C。由 χ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$), δ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) 为多项式函数,因此,在边界条件(11)下,方程(35)有形式如下的解:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = r_1(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_1(y) e^{-y^2} \\ \varphi_2^{(1)} = r_2(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_2(y) e^{-y^2} \\ \varphi_3^{(1)} = r_3(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_3(y) e^{-y^2} \\ \varphi_4^{(1)} = r_4(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_4(y) e^{-y^2} \\ \varphi_5^{(1)} = r_5(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_5(y) e^{-y^2} \\ \varphi_6^{(1)} = r_6(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_6(y) e^{-y^2} \\ \varphi_7^{(1)} = r_7(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} + s_7(y) e^{-y^2} \end{cases} \quad (36)$$

其中, $r_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots, 5$) 和 $s_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots, 5$) 为复杂的多项式函数,此处略去。将海洋流场分解公式(9)、一阶近似表达式(25)、振幅的空间和时间变换公式(30)带入到级数分解公式(14)中,得到关于海洋重力势 φ_s 的一阶近似

$$\begin{aligned} \varphi_s = \overline{\Phi}_s(y) + \varphi_{s0} + \varepsilon \varphi_{s1} = A_1(\tau, T, \xi, X) \varphi_1^{(0)}(y) e^{ik(x-c_1t)} + A_2(\tau, T, \xi, X) \varphi_2^{(0)}(y) e^{ik(x-c_2t)} + \\ \varepsilon \left(\sum_{j=1}^2 A_j^2 \varphi_j^{(1)}(y) e^{2ik(x-c_jt)} + A_1 A_2 \varphi_3^{(1)}(y) e^{ik[2x-(c_1+c_2)t]} + A_1 \overline{A}_2 \varphi_4^{(1)}(y) e^{-ik(c_1-c_2)t} + \overline{A}_1 A_2 \varphi_5^{(1)}(y) e^{ik(c_1-c_2)t} + \right. \\ \left. \frac{1}{ik} A_1 \varphi_6^{(1)}(y) e^{ik(-c_1)t} + \frac{1}{ik} A_2 \varphi_7^{(1)}(y) e^{ik(-c_2)t} + \kappa x^2 \overline{\Phi}_s - \kappa x^2 y \frac{d\overline{\Phi}_s}{dy} + \kappa x y^2 \frac{d^2\overline{\Phi}_s}{dy^2} \right) + C.C \end{aligned} \quad (37)$$

取上述参数,可得到 60 个月的海洋 Kelvin 波和 Rossby 波的准周期运动。

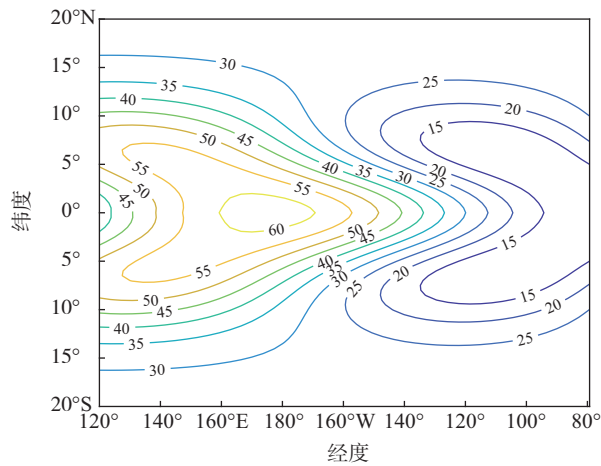
根据图 5 可知,在 ENSO 运动中, Kelvin 波和 Rossby 波是一直都存在的,由于相互的非线性作用,二者在不同阶段体现出不同的状态,总体为:蛰伏(酝酿)→增长→衰减→蛰伏(酝酿),而耦合波波包效应的正负变换,对应了赤道太平洋温跃层的高低变换。ENSO 正是赤道太平洋在 Kelvin 波东移和 Rossby 波西移过程中,通过耦合波状态的循环与波包效应的正负变换,形成的不规则的准周期运动。具体表现如下。

在 El Niño 位相前兆期,赤道波导区低空的西风应力,在赤道激发出暖的 Kelvin 波,它从西太平洋到达东太平洋的时间为 2~3 个月。西风产生的气旋性风应力旋度使东太平洋表层海水辐散,致使温跃层变浅,海面温度变冷,有弱的冷 Rossby 波存在,

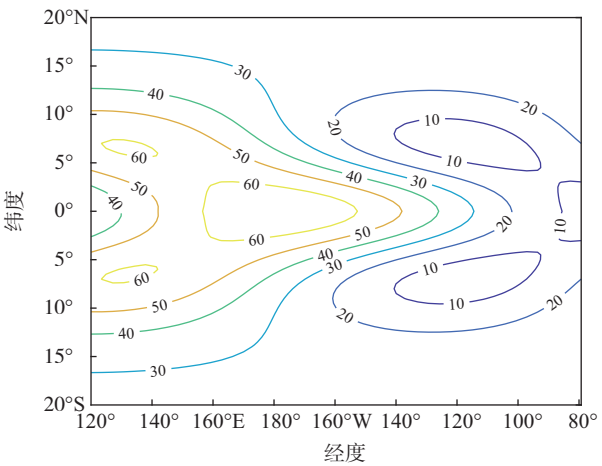
其蛰伏时间为暖 Kelvin 波运动时间。当暖的 Kelvin 波到达东太平洋后,使该处海面温度升高,温跃层变深,形成 El Niño 位相,此时赤道两边的辐散作用增强,冷的 Rossby 波开始增强并缓慢向西运动,它通过热带海盆所需的时间为 1~2 年,随后逐渐衰减。此时,暖的 Kelvin 波在东海岸维持少动并逐渐衰减。随着冷的 Rossby 波到达西太平洋,使得原来的暖池变冷,形成 La Niña 位相前兆期。随后,在赤道波导区低空西风应力的作用下,赤道激发出冷的 Kelvin 波,它从西太平洋到达东太平洋的时间为 2~3 个月。西风产生的反气旋风应力旋度使该处表层海水辐合,致使温跃层变深,海面温度变高,有弱的暖 Rossby 波存在,其蛰伏时间为冷的 Kelvin 波运动时间。当冷的 Kelvin 波到达东太平洋后,使该处海面温度变低,温跃层变浅,形成 La Niña 位相,此时赤道两边的辐散作用增强,暖的 Rossby 波开始增强

并缓慢向西运动,它通过热带海盆所需的时间为 1~2 年,随后逐渐衰减。此时,暖的 Kelvin 波在东海岸维

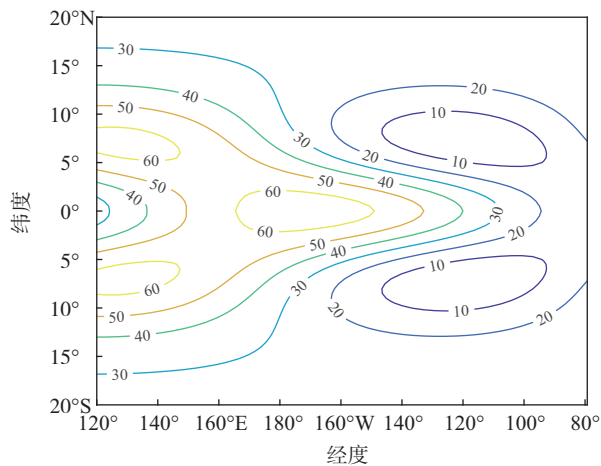
持少动并逐渐衰减。随着暖的 Rossby 波到达西太平洋,使得暖池恢复,再次形成 El Niño 位相前兆期。



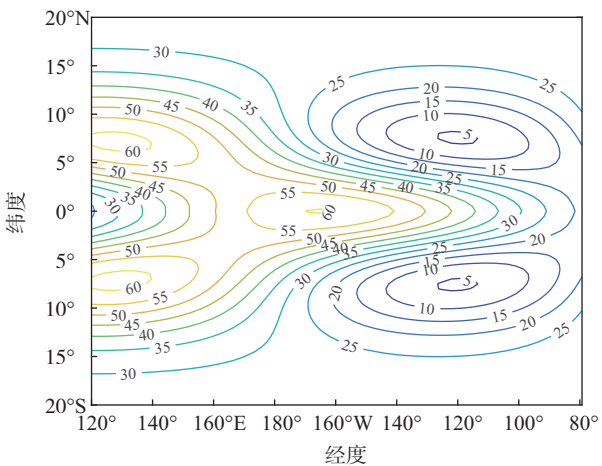
(a) 初始场 (西太平洋暖Kelvin波生成)



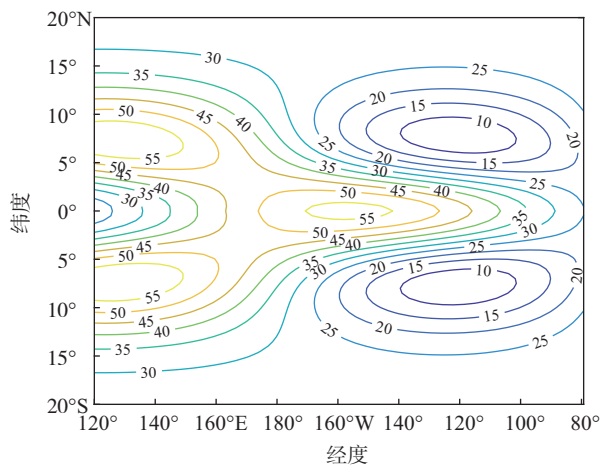
(b) 第1个月 (暖Kelvin波向东太平洋运动, 东太平洋冷Rossby波形成)



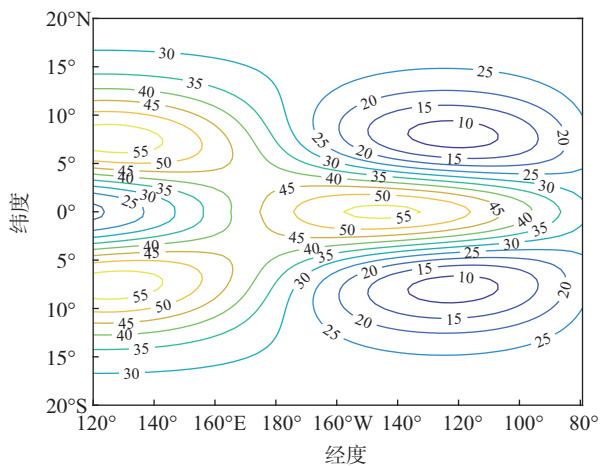
(c) 第2个月 (暖Kelvin波向东太平洋运动)



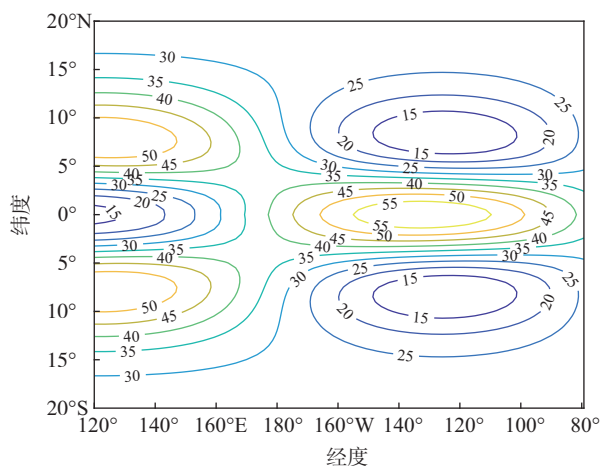
(d) 第3个月 (暖Kelvin波到达东太平洋, 冷Rossby波逐渐增强)



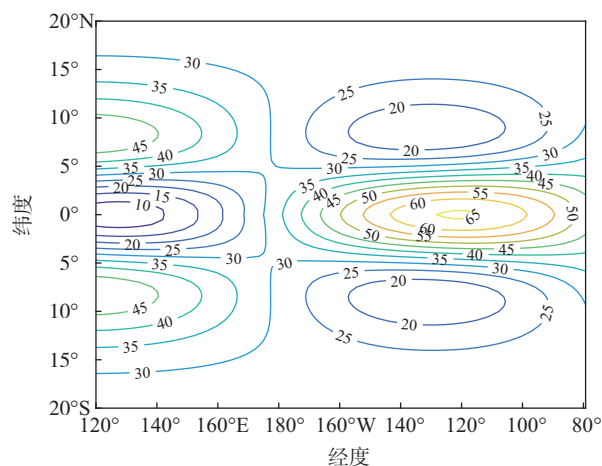
(e) 第6个月 (冷Rossby波逐渐增强, 并开始向西移动)



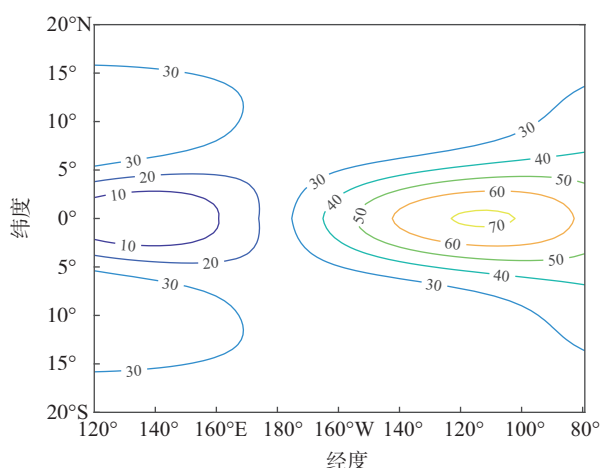
(f) 第9个月 (冷Rossby波向西移动, 并引起西太平洋逐渐转冷)



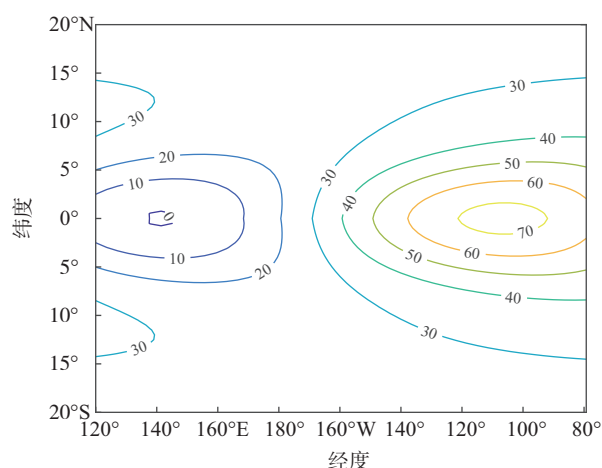
(g) 第12个月 (冷Rossby波向西移动, 西太平洋继续变冷)



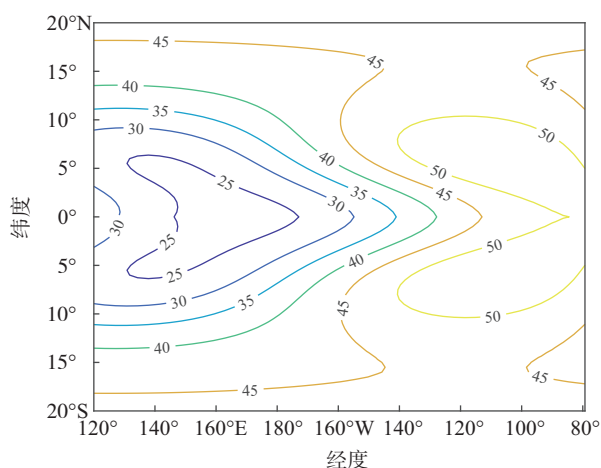
(h) 第15个月 (冷Rossby波向西移动, 西太平洋进一步变冷)



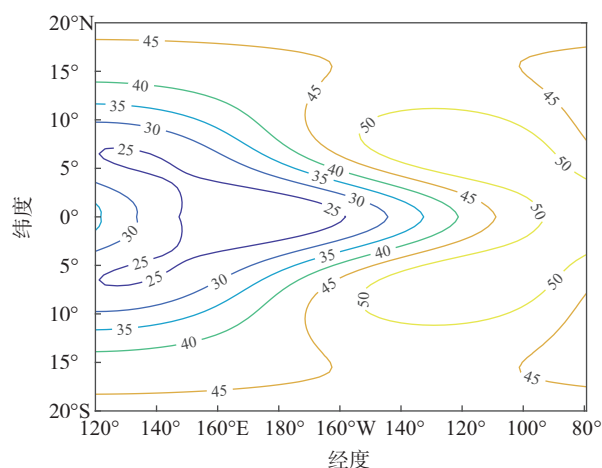
(i) 第21个月 (西太平洋冷池形成)



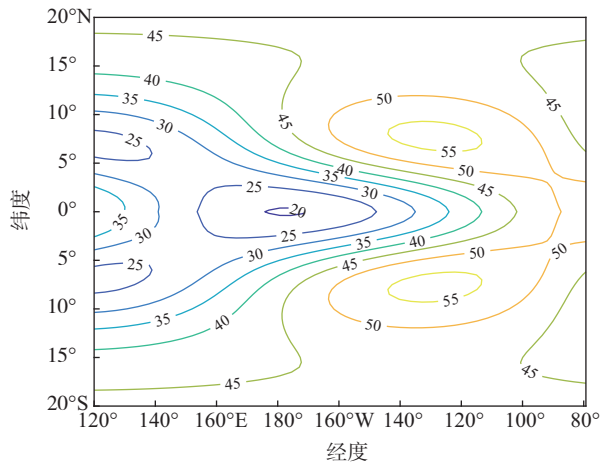
(j) 第24个月 (西太平洋冷池增强)



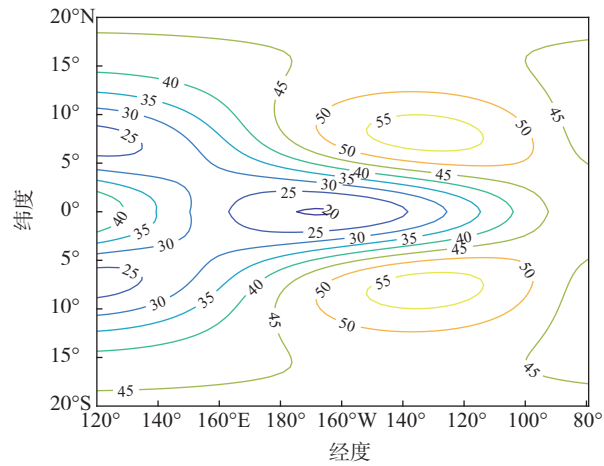
(k) 第30个月 (西太平洋冷Kelvin波生成)



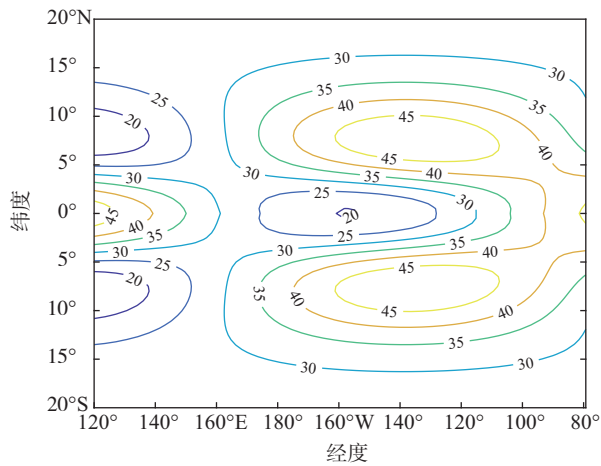
(l) 第31个月 (冷Kelvin波向东太平洋运动)



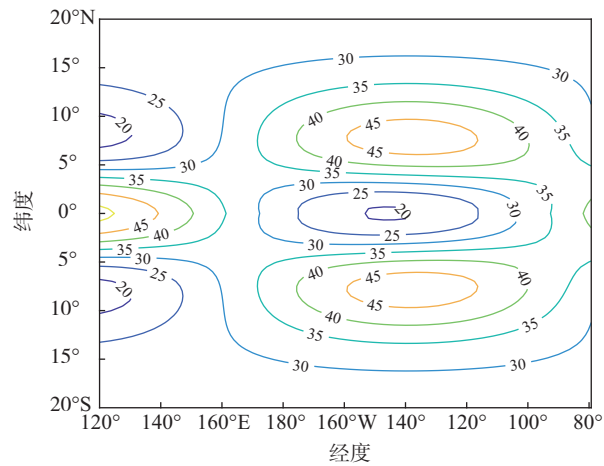
(m) 第32个月 (冷Kelvin波向东太平洋运动, 东太平洋暖Rossby波形成)



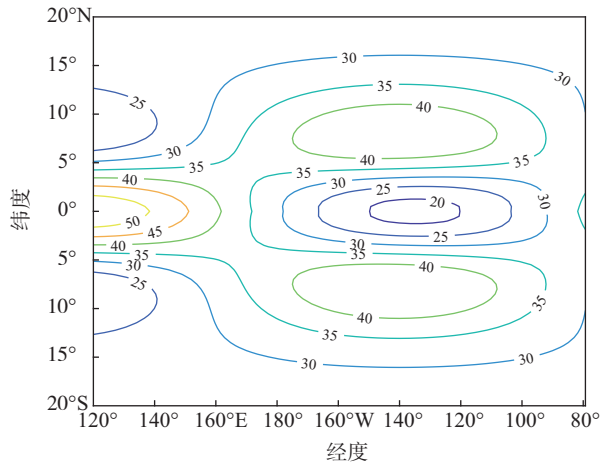
(n) 第33个月 (冷Kelvin波到达东太平洋, 暖Rossby波逐渐增强)



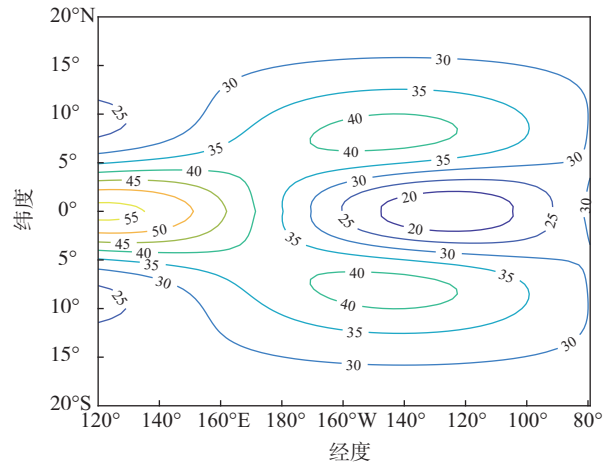
(o) 第36个月 (暖Rossby波逐渐增强, 并开始向西太平洋运动)



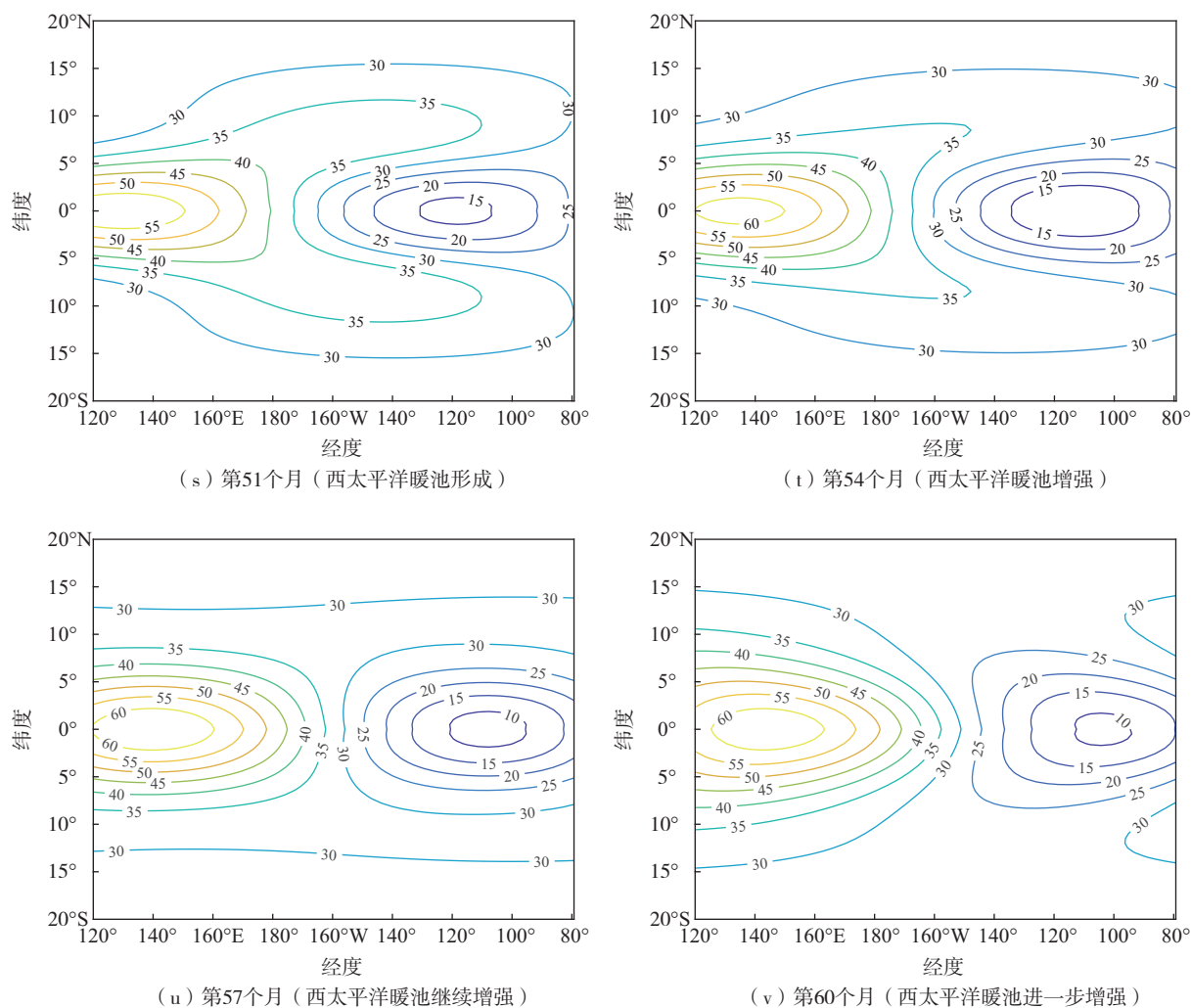
(p) 第39个月 (暖Rossby波向西太平洋运动, 并引起西太平洋逐渐转暖)



(q) 第42个月 (暖Rossby波向西移动, 西太平洋继续变暖)



(r) 第45个月 (暖Rossby波向西移动, 西太平洋进一步变暖)



赤道中心位置—Kelvin波; 赤道两侧位置—Rossby波; 等值线—海平面高度, 单位为cm,
黄色、橙色、绿色代表暖水, 青色、蓝色、紫色代表冷水。

图5 Kelvin波和Rossby波在一个典型ENSO周期内的运动
Fig.5 Motion of Kelvin and Rossby waves in a typical ENSO cycle

5 结论与讨论

基于微软公司开发的符号计算系统 Maple, 以一阶近似地转效应的浅水方程为基础, 通过多尺度和摄动近似的方法, 分析了低纬海气耦合系统的非线性 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用。首先, 给出了无风应力条件下自激耦合系统的运动特征, 这种自激运动振幅较小且呈准周期变化, 分析发现自激耦合运动的准周期变化是 Kelvin 波和 Rossby 波各自的扭结效应和二者的非线性效应共同作用的结果。其次, 研究分析了在有风应力条件下耦合系统的运动特征, 即耦合波振幅在指数型螺旋振荡增大后, Kelvin 波呈准周期振荡, Rossby 波呈非周期振

荡, 这种准周期与非周期振荡的叠加效应, 使得 ENSO 准周期运动呈显著的不规则性。最后, 通过简化流场的近似模拟得出, 在 ENSO 运动中, Kelvin 波和 Rossby 波是一直都存在的, 由于相互的非线性作用, 二者在不同阶段体现出不同的状态, 总体为: 蛰伏(酝酿)→增长→衰减→蛰伏(酝酿)。

此研究仅考虑了定常的大气运动, 没有体现出 Walker 环流的变化特征。因此, 下一步将研究非定常风应力在低纬海气耦合的作用, 以进一步揭示 ENSO 准周期振荡的物理机制。

参考文献:

- [1] BJERKNES J. A possible response of the atmospheric

- Hadley circulation to equatorial anomalies of ocean temperature[J]. *Tellus*, 1966, 18(4): 820-829.
- [2] McCREARY J P Jr, ANDERSON D L T. A simple model of El Niño and the Southern Oscillation[J]. *Mon Wea Rev*, 1984, 112(5): 934-946.
- [3] SCHOPF P S, SUAREZ M J. Vacillations in a coupled ocean-atmosphere model[J]. *J Atmos Sci*, 1988, 45(3): 549-566.
- [4] SUAREZ M J, SCHOPF P S. A delayed action oscillator for ENSO[J]. *J Atmos Sci*, 1988, 45(21): 3283-3287.
- [5] 李崇银. 大气季节内振荡研究的新进展[J]. *自然科学进展*, 2004, 14(7): 734-741.
- [6] 黄荣辉, 傅云飞, 臧晓云. 亚洲季风与 ENSO 循环的相互作用[J]. *气候与环境研究*, 1996, 1(1): 38-54.
- [7] 李崇银, 胡季. 东亚大气环流与厄尔尼诺相互影响的一个分析研究[J]. *大气科学*, 1987, 11(4): 359-364.
- [8] 张人禾, 闵庆烨, 苏京志. 有关副热带太平洋对 ENSO 影响研究的综述[J]. *海洋气象学报*, 2017, 37(1): 1-9.
- [9] 李晓惠, 徐峰, 陈虹颖, 等. 1980—2016 年西太平洋暖池与 ENSO 循环过程的相关分析[J]. *海洋气象学报*, 2017, 37(3): 85-94.
- [10] 张萍, 徐峰, 涂石飞, 等. 1979—2017 年南海 SSTA 时空特征及其与沃克环流异常的相关[J]. *海洋气象学报*, 2019, 39(1): 15-25.
- [11] 林婷婷, 李春. ENSO 与南海 SST 关系的年代际变化[J]. *海洋气象学报*, 2019, 39(2): 68-75.
- [12] 薛德强, 徐建军. 两类厄尔尼诺事件期间热带大气 GILL 响应分析[J]. *海洋气象学报*, 2021, 41(1): 82-91.
- [13] PHILANDER S G H, YAMAGATA T, PACANOWSKI R C. Unstable air-sea interactions in the tropics [J]. *J Atmos Sci*, 1984, 41(4): 604-613.
- [14] CANE M A, ZEBIAK S E. A theory for El Niño and the Southern Oscillation [J]. *Science*, 1985, 228 (4703): 1085-1087.
- [15] MATSUNO T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area[J]. *J Meteor Soc Japan*, 1966, 44(1): 25-43.
- [16] DOMARACKI A, LOSSCH A Z. Nonlinear interactions among equatorial waves[J]. *J Atmos Sci*, 1977, 34(3): 486-498.
- [17] CHAO J P, ZHANG R H. The air-sea interaction waves in the tropics and their instabilities[J]. *Acta Meteor Sin*, 1988, 2(3): 275-287.
- [18] 房佳蓓, 杨修群. 经向风应力在热带不稳定海气相互作用中的角色[J]. *热带气象学报*, 2003, 19(1): 43-52.

附录 A

方程(23)的各项系数如下:

$$\begin{aligned}
 f_{1j} = & \left(\frac{1}{y^2} \varphi_j^{(0)} + \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \xi} - \left(\varphi_j^{(0)} + \frac{2}{y^3} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y^2} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \tau} - \frac{1}{y} \left[\frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} \left(\varphi_j^{(0)} + c_j \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{1}{y} \frac{1}{y} \frac{d\bar{U}_s}{dy} \left(c_j \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} - c_j \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) - \bar{U}_s \left(c_j \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} \right) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{y} \varphi_j^{(0)} - \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \right] ik A_j, \\
 f_{2j} = & \left[- \left(\frac{1}{y^4} + \frac{2}{y^3} \right) \left(\frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right)^2 + \frac{2}{y^3} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right] + \frac{1}{y^2} \left(c_j \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - c_j \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \times \\
 & \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} \right) + \left(\varphi_j^{(0)} + c_j \frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} \right) \left(\frac{1}{y} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} - \frac{4}{y^5} \frac{d\varphi_j^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^4} \frac{d^2\varphi_j^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y^3} \frac{d^3\varphi_j^{(0)}}{dy^3} \right), \\
 f_{3j} = & - \left(\frac{1}{y} \varphi_1^{(0)} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \varphi_2^{(0)} + \frac{2}{y^4} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) + \frac{2}{y^3} \left(\frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d^2\varphi_2^{(0)}}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1^{(0)}}{dy^2} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) + \\
 & \frac{1}{y} \left[\left(\varphi_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} + \left(\varphi_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right] - \frac{4}{y^4} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} + \\
 & \frac{1}{y^2} \left(\varphi_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \left(- \frac{4}{y^3} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^2} \frac{d^2\varphi_1^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d^3\varphi_1^{(0)}}{dy^3} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\varphi_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \times \\
 & \frac{1}{y^2} \left(c_2 \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_2^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - c_2 \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2\varphi_1^{(0)}}{dy^2} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{y^2} \left(c_1 \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} - c_1 \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2} \right), \\
f_4 = & - \left(\frac{1}{y} \varphi_1^{(0)} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \bar{\varphi}_2^{(0)} + \frac{2}{y^4} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right) + \frac{2}{y^3} \left(\frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d^2 \bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right) + \\
& \frac{1}{y} \left[\left(\bar{\varphi}_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} + \left(\varphi_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right] - \frac{4}{y^4} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} + \\
& \frac{1}{y^2} \left(\bar{\varphi}_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right) \left(-\frac{4}{y^3} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^2} \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d^3 \varphi_1^{(0)}}{dy^3} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\varphi_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \times \\
& \left(-\frac{4}{y^3} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^2} \frac{d^2 \bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d^3 \bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy^3} \right) + \frac{1}{y^2} \left(c_2 \frac{1}{y} \frac{d^2 \bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} - c_2 \frac{1}{y^2} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} \right) \times \\
& \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2} \right) + \frac{1}{y^2} \left(c_1 \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} - c_1 \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} \right) \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \bar{\varphi}_2^{(0)}}{dy^2} \right), \\
f_5 = & - \left(\frac{1}{y} \varphi_2^{(0)} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \bar{\varphi}_1^{(0)} + \frac{2}{y^4} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right) + \frac{2}{y^3} \left(\frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \frac{d^2 \bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right) + \\
& \frac{1}{y} \left[\left(\bar{\varphi}_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} + \left(\varphi_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right] - \frac{4}{y^4} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} + \\
& \frac{1}{y^2} \left(\bar{\varphi}_1^{(0)} + c_1 \frac{1}{y} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right) \left(-\frac{4}{y^3} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^2} \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d^3 \varphi_2^{(0)}}{dy^3} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\varphi_2^{(0)} + c_2 \frac{1}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \times \\
& \left(-\frac{4}{y^3} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} + \frac{4}{y^2} \frac{d^2 \bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d^3 \bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy^3} \right) + \frac{1}{y^2} \left(c_1 \frac{1}{y} \frac{d^2 \bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} - c_1 \frac{1}{y^2} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} \right) \times \\
& \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2} \right) + \frac{1}{y^2} \left(c_2 \frac{1}{y} \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2} + \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - c_2 \frac{1}{y^2} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} \right) \left(\frac{1}{y^2} \frac{d\bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy} - \frac{1}{y} \frac{d^2 \bar{\varphi}_1^{(0)}}{dy^2} \right), \\
f_6 = & \frac{2}{y} \frac{d\varphi_1^{(0)}}{dy} - \frac{2}{y^2} \varphi_1^{(0)} + \frac{d^2 \varphi_1^{(0)}}{dy^2}, \\
f_7 = & \frac{2}{y} \frac{d\varphi_2^{(0)}}{dy} - \frac{2}{y^2} \varphi_2^{(0)} + \frac{d^2 \varphi_2^{(0)}}{dy^2}.
\end{aligned}$$

附录 B

振幅方程 (29) 中的各项系数构成如下:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{y_1}^{y_2} \left[-\frac{y^3}{4} \left(y^3 \varphi_1^{(1)} - y \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + 2 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) \right] dy, \\
I_{11} &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{y^4}{4} \varphi_1^{(1)} \right) dy, \\
I_{12} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{y^3}{4} \left[-y \frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} \varphi_1^{(1)} - y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + \left(y^3 \bar{U}_s + 2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \varphi_1^{(1)} \right] \right\} dy, \\
I_{13} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ -\frac{y^2}{4} \left[-y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \left(y^3 \bar{U}_s - y \frac{d^2 \bar{U}_s}{dy^2} + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] \right\} dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{xy^3}{4} \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^3\varphi_1^{(1)}}{dy^3} - xy^2 \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^2\varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{xy^4}{4} \frac{d^3\bar{\Phi}_s}{dy^3} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - \frac{xy^3}{4} \frac{d^2\bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + xy \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] dy, \\
I_{15} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{ky}{4} \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} \left[\left(y\bar{U}_s - 2c_1 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} - 2y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_1^{(1)} \right] - \right. \\
&\quad \frac{\kappa k x^2 y^3}{8} \frac{d^4\bar{\Phi}_s}{dy^4} \left(y\varphi_1^{(1)} + c_1 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right) + \frac{ky^2}{4} \left(y^3\bar{U}_s + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_1^{(1)} + \\
&\quad \frac{\kappa xy^2}{4} \frac{d^3\bar{\Phi}_s}{dy^3} \left[-\frac{kc_1 xy}{2} \frac{d^2\varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \left(-\frac{kxy^2}{2} + \frac{3kc_1 x}{2} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + kxy\varphi_1^{(1)} \right] + \\
&\quad y \left[-y \left(\frac{kc_1}{4} \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 - \frac{ky}{4} \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d^2\varphi_1^{(1)}}{dy^2} + \frac{\kappa kc_1 x^2 y^4}{8} \frac{d^2\bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} + \right. \\
&\quad \left. \left(kc_1 \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 + \frac{ky}{4} (c_1 y^2 - 3) \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} - \frac{ky^4}{4} \bar{U}_s^2 \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] \Big\} dy, \\
I_{16} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{k(c_1 - c_2)y^2}{4} \frac{d^3\varphi_2^{(1)}}{dy^3} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + y\varphi_2^{(1)} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} - ky^2\varphi_2^{(1)} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \right. \\
&\quad \frac{ky^2}{4} \left(y\varphi_2^{(1)} + c_2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^3\varphi_5^{(1)}}{dy^3} - \frac{5ky}{4} \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} \left[-\frac{c_1 y}{5} \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(c_1 - \frac{4c_2}{5} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \right] - \\
&\quad ky \left[\left(-\frac{y^2}{4} + \frac{c_1}{4} + c_2 \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right] \frac{d^2\varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left[\left(\frac{5c_1}{4} - \frac{c_1 y^4}{4} - \frac{y^2}{4} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right] \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \Big\} dy, \\
I_2 &= \int_{y_1}^{y_2} \left[-\frac{y^3}{4} \left(y^3\varphi_2^{(1)} - y \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + 2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \right] dy, \\
I_{21} &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{y^4}{4} \varphi_2^{(1)} \right) dy, \\
I_{22} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{y^3}{4} \left[-y \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} \varphi_2^{(1)} - y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + \left(y^3\bar{U}_s + 2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \varphi_2^{(1)} \right] \right\} dy, \\
I_{23} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ -\frac{y^2}{4} \left[-y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \left(y^3\bar{U}_s - y \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right] \right\} dy, \\
I_{24} &= \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{xy^3}{4} \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^3\varphi_2^{(1)}}{dy^3} - xy^2 \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d^2\varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{xy^4}{4} \frac{d^3\bar{\Phi}_s}{dy^3} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - \frac{xy^3}{4} \frac{d^2\bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + xy \left(-y \frac{d\bar{\Phi}_s}{dy} + \bar{\Phi}_s \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right] dy, \\
I_{25} &= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{ky}{4} \frac{d^2\bar{U}_s}{dy^2} \left[\left(y\bar{U}_s - 2c_2 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} - 2y \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_2^{(1)} \right] - \right. \\
&\quad \frac{\kappa k x^2 y^3}{8} \frac{d^4\bar{\Phi}_s}{dy^4} \left(y\varphi_2^{(1)} + c_2 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) + \frac{ky^2}{4} \left(y^3\bar{U}_s + 3 \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d\bar{U}_s}{dy} \varphi_2^{(1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa xy^2}{4} \frac{d^3 \bar{\Phi}_s}{dy^3} \left[-\frac{kc_2 xy}{2} \frac{d^2 \varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \left(-\frac{kxy^2}{2} + \frac{3kc_2 x}{2} \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + kxy\varphi_2^{(1)} \right] + \\
& y \left[-y \left(\frac{kc_2}{4} \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 - \frac{ky}{4} \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} \right) \frac{d^2 \varphi_2^{(1)}}{dy^2} + \frac{\kappa kc_2 x^2 y^4}{8} \frac{d^2 \bar{\Phi}_s}{dy^2} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} + \right. \\
& \left. \left(kc_2 \left(\frac{d\bar{U}_s}{dy} \right)^2 + \frac{ky}{4} (c_2 y^2 - 3) \bar{U}_s \frac{d\bar{U}_s}{dy} - \frac{ky^4}{4} \bar{U}_s^2 \right) \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right] dy, \\
I_{26} = & \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{k(c_2 - c_1)y^2}{4} \frac{d^3 \varphi_1^{(1)}}{dy^3} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} + y\varphi_1^{(1)} \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} - ky^2 \varphi_1^{(1)} \frac{d^2 \varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \right. \\
& \frac{ky^2}{4} \left(y\varphi_1^{(1)} + c_1 \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dy} \right) \frac{d^3 \varphi_5^{(1)}}{dy^3} - \frac{5ky}{4} \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{dy^2} \left[-\frac{c_2 y}{5} \frac{d^2 \varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left(c_2 - \frac{4c_1}{5} \right) \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \right] - \\
& \left. ky \left[\left(-\frac{y^2}{4} + \frac{c_2}{4} + c_1 \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] \frac{d^2 \varphi_5^{(1)}}{dy^2} + \left[\left(\frac{5c_2}{4} - \frac{c_2 y^4}{4} - \frac{y^2}{4} \right) \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dy} \right] \frac{d\varphi_5^{(1)}}{dy} \right\} dy.
\end{aligned}$$

附录 C

方程(35)的各项系数如下:

$$\chi_1(y) = -k,$$

$$\delta_1(y) = -\frac{k^2}{y^2} (c_1 y^2 + y^2 + c_1 + 2y - 2),$$

$$\chi_2(y) = 2(\omega_2 - k)y^2 - n(\omega_2 + k) - 5(\omega_2 - k),$$

$$\begin{aligned}
\delta_2(y) = & -\frac{1}{y^2} [-4(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)c_2 y^4 + 36(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)c_2 y^2 + 4(\omega_2 - k)^2 c_2 y^6 - \\
& 48(\omega_2 - k)^2 c_2 y^4 - 4(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)y^4 + 93(\omega_2 - k)^2 c_2 y^2 + n^2(\omega_2 + k)^2 c_2 y^2 - \\
& 8(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)y^3 + 14(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)y^2 - 34(\omega_2 - k)^2 - \\
& 2n^2(\omega_2 + k)^2 + 4(\omega_2 - k)^2 y^6 + 8(\omega_2 - k)^2 y^5 - 20(\omega_2 - k)^2 y^4 - 40(\omega_2 - k)^2 y^3 + 77(\omega_2 - k)^2 y^2 + \\
& n^2(\omega_2 + k)^2 y^2 + 45(\omega_2 - k)^2 c_2 + n^2(\omega_2 + k)^2 c_2 + 50(\omega_2 - k)^2 y + 2n^2(\omega_2 + k)^2 y - 20(\omega_2 - k)n(\omega_2 + k)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3(y) = & \frac{k}{y^2} [2(\omega_2 - k)(c_1 + c_2)y^4 + 4(\omega_2 - k)y^4 - 17(\omega_2 - k)c_1 y^2 - n(\omega_2 + k)(c_1 + c_2)y^2 - \\
& 5(\omega_2 - k)c_2 y^2 - 2(\omega_2 - k)y^2 - 2n(\omega_2 + k)y^2 - 14(\omega_2 - k)c_2 - 2n(\omega_2 + k)c_2],
\end{aligned}$$

$$\chi_4(y) = -2[2(\omega_2 - k)(c_2 - c_1)y^2 - 9(\omega_2 - k)(c_2 - c_1) - n(\omega_2 + k)(c_2 - c_1) - 4(\omega_2 - k)],$$

$$\begin{aligned}
\delta_4(y) = & -\frac{2}{y} [16(\omega_2 - k)y^4 - 12(\omega_2 - k)c_1 y^2 + 4(\omega_2 - k)c_2 y^2 - 64(\omega_2 - k)y^2 + 8n(\omega_2 + k)y^2 - \\
& 18(\omega_2 - k)c_1 - 2n(\omega_2 + k)c_1 - 20(\omega_2 - k)c_2 - 2n(\omega_2 + k)c_2 + 80(\omega_2 - k) + 8n(\omega_2 + k)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_5(y) = & \frac{k}{y^2} [2(\omega_2 - k)(c_1 + c_2)y^4 + 4(\omega_2 - k)y^4 - 15(\omega_2 - k)c_1 y^2 - n(\omega_2 + k)(c_1 + c_2)y^2 - \\
& 7(\omega_2 - k)c_2 y^2 - 10(\omega_2 - k)y^2 - 2n(\omega_2 + k)y^2 - 9(\omega_2 - k)c_1 - n(\omega_2 + k)(c_1 + c_2) - 5(\omega_2 - k)c_2].
\end{aligned}$$